9

NEKONEČNÉ ŘADY

Jak už víme, nekonečná řada může mít konečný součet, třeba

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \frac{1}{3}.$$

Abychom však mohli tuto myšlenku využít v kalkulu, musíme nejprve trochu rozšířit svoje obzory a podívat se na řady, jejichž jednotlivé členy jsou funkcemi proměnné x.

Nejjednodušší z takových řad je *geometrická řada*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro} -1 < x < 1.$$

Navíc pro tento speciální případ existuje pozoruhodně jednoduchý důkaz.

Začneme tím, že označíme symbolem s_n součet prvních n členů řady, a tento výraz vzápětí vynásobíme faktorem x:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}, \\ xs_n &= x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n. \end{aligned}$$

Odečteme-li druhý řádek od prvního, na pravé straně dojde k okázalému vzájemnému rušení většiny členů a vyjde nám elegantní vztah

$$(1 - x)s_n = 1 - x^n.$$

Nakonec pošleme $n \to \infty$. Za předpokladu $-1 < x < 1$ platí $x^n \to 0$, a tedy $s_n \to 1/(1-x)$, což jsme chtěli dokázat.

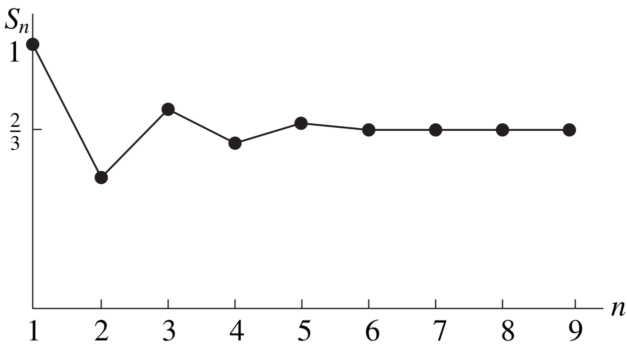
Blíže a blíže

Vezmeme-li například $x = 1/4$, potom dostaneme znovu výsledek, který známe ze začátku kapitoly.

Vezmeme-li ale $x = -1/2$, pak nám vyjde řada s alternujícími znaménky:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{2}{3}.$$

Částečné součty s_n tedy oscilují (obrázek 46), ale konvergence je tak rychlá, že se hodnota s_n dostává do těsné blízkosti limity $2/3$ už po sečtení prvních šesti nebo sedmi členů.



Obr. 46: Konvergence k limitě.

Toto všechno jsou ale jen speciální případy. Dokázali jsme, že řada

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

konverguje k součtu $1/(1 - x)$ pro *jakoukoli* hodnotu x z intervalu $-1 < x < 1$.

Možná zde vzniká mírné nebezpečí, že podmínka na x je příliš „zřejmá“.

Koneckonců jejím jediným úkolem je zaručit, že se jednotlivé členy v absolutní hodnotě budou s rostoucím indexem n zmenšovat (místo aby rostly).

Divergentní řada

Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots .$$

Jednotlivé členy se sice i zde neustále zmenšují, avšak v tomto případě řada konečný součet nemá, neboť její částečné součty rostou nade všechny meze.

Tento fakt dokázal již v roce 1350 francouzský učenec Nicole Oresme a jeho důkaz je senzačně jednoduchý. Oresme prostě jen sdružil jednotlivé členy do vhodně zvolených skupin. Udělal to následujícím způsobem:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ \vdots \end{array}$$

takže každá nová skupina má dvojnásobný počet členů oproti té předcházející.

Oresme pokračoval pozorováním, že hodnota $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ je větší než $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, podobně součet členů v následující skupině je větší než $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$, součet členů na dalším řádku převyšuje $8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$, a tak dále.

No a protože řada $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$ nekonverguje ke konečnému součtu, plyne odtud, že ani uvažovaná řada nemůže být konvergentní.

Uvedená řada tedy představuje jakýsi odstrašující příklad, jehož důležité důsledky ještě uvidíme později.

Současnou kapitolu však zakončíme v trochu odlišném duchu. Ukazuje se totiž, že tento výsledek má praktický význam, i když poněkud exotické povahy.

Extrémní hromadění

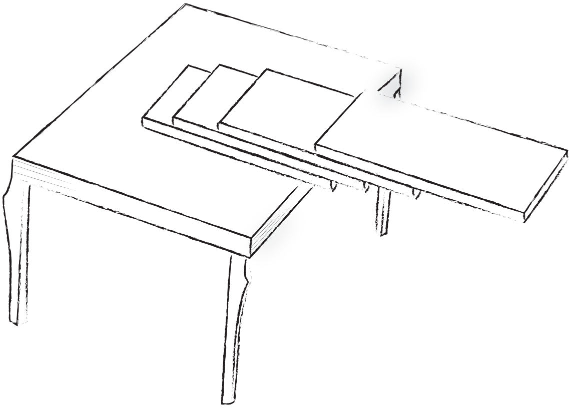
Představme si, že na kraji stolu vytváříme hromadu z obdélníkových destiček, přičemž klademe jednu na druhou, aby sloupec co nejvíce přesahoval přes okraj.

Jestliže má každá destička délku 1 (v libovolných jednotkách), jak velký převis můžeme vytvořit, aniž se celá konstrukce působením gravitace zhroutí?

Máme-li jen jednu destičku, pak zmíněný přesah bude zřejmě roven $1/2$ délkové jednotky. Se čtyřmi destičkami se ale vyšplháme až k převisu délky

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right),$$

což již o něco přesahuje jedničku, takže svrchní destička se bude celá vznášet mimo stůl (obrázek 47).



Obr. 47: Převis čtyř destiček.

Chceme-li dosáhnout převisu delšího než dvě délkové jednotky, bude nám stačit 31 destiček. S 31 destičkami totiž maximální možný převis činí

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{31}\right)\approx 2{,}013\,6$$

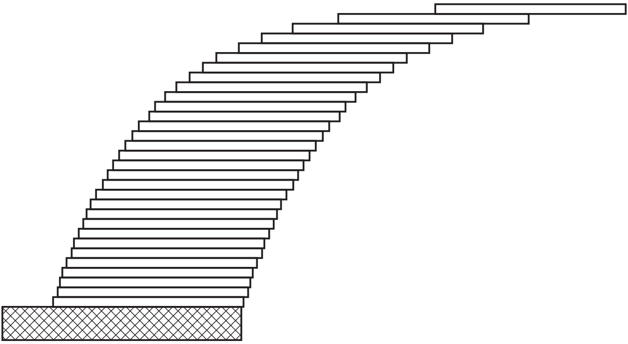
(obrázek 48). A takto lze pokračovat s maximálním možným převisem činícím

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Poněkud překvapivě lze takto dojít k závěru, že převis můžeme vyrobit *libovolně velký*, máme-li k dispozici dostatečné množství destiček, protože nekonečná řada

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

diverguje, tedy nemá konečný součet.



Obr. 48: Převis konstrukce s 31 destičkami.

Musím se ale přiznat, že jsem dlouho podceňoval, jak pomalu tato řada diverguje, dokud jsem se neocitl na matematickém představení s hromadou krabic od pizzy ve velkém divadle v centru města.

Před začátkem představení jsem čistě ze zvědavosti vypočítal, jak vysoký by musel být sloupec vytvořený z krabic k tomu, aby konstrukce vytvořila převis přes pódium.

Odpověď zněla 5,8 světelného roku.