

Kalkulus

a jeho dobrodružství

Matematika pro odvážné

David Acheson

DOKOŘÁN

Z anglického originálu *The Calculus Story*:
A Mathematical Adventure přeložil Luboš Pick.

Věnováno památce
dr. Janet Millsové
(1954–2007),
která jednou prohlásila,
že kalkulu nikdy docela neporozuměla.

The Calculus Story: A Mathematical Adventure was originally published in English in 2017. This translation is published by arrangement with Oxford University Press. Dokořán s. r. o. is solely responsible for this translation from the original work and Oxford University Press shall have no liability for any errors, omissions or inaccuracies or ambiguities in such translation or for any losses caused by reliance thereon.

Kalkulus a jeho dobrodružství. Matematika pro odvážné byla původně vydána v angličtině v roce 2017. Tento překlad vychází po dohodě s nakladatelstvím Oxford University Press. Za chyby, vynechávky, nepřesnosti či nejednoznačnosti překladu plně a výhradně odpovídá nakladatelství Dokořán, s. r. o.

© David Acheson 2017
Translation © Luboš Pick, 2024

ISBN 978-802-7675-136-1

OBSAH

1	Úvod	7
2	Duch matematiky	12
3	Nekonečno	17
4	Jak strmá je ta křivka?	26
5	Derivování	31
6	Největší a nejmenší	38
7	Hrátky s nekonečnem	44
8	Obsah a objem	51
9	Nekonečné řady	60
10	Příliš mnoho rozkoší	66
11	Dynamika	70
12	Newton a pohyby planet	76
13	Leibnizův článek z roku 1684	84
14	Rébus	93
15	Kdo vynalezl kalkulus?	99
16	Dokola kolem kruhů	106
17	Číslo π a lichá čísla	110
18	Kalkulus pod palbou	118
19	Diferenciální rovnice	124
20	Kalkulus a elektrická kytara	131
21	Nejlepší ze všech možných světů?	138
22	Záhadné číslo e	145
23	Jak vyrobit řadu	150
24	Kalkulus s imaginárními čísly	155
25	Nekonečno vrací úder	160

26	Co to vlastně ta limita je?	168
27	Rovnice přírody	173
28	Od kalkulu k chaosu	180
	<i>Doporučená literatura</i>	187
	<i>Práva k ilustracím</i>	188
	<i>Rejstřík</i>	189

1

ÚVOD

V létě 1666 spatřil Isaac Newton na své zahradě padající jablko a okamžitě tuto zkušenost přetavil na objev kalkulu a teorie gravitace.

Tak alespoň praví legenda.

Jakkoli tato historka až příliš zjednodušuje skutečnost, je nepochybně dobrým kandidátem na nejlepší způsob, jak započít vyprávění o kalkulu.

Jablko totiž při pádu *zrychluje*.

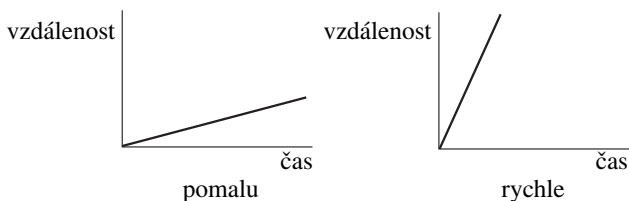


Obr. 1: Newton a jablko.

Položme si zásadní otázku. Co vlastně míníme okamžitou rychlostí jablka v daném čase? Známy vzoreček

$$\text{rychlost} = \frac{\text{vzdálenost}}{\text{čas}}$$

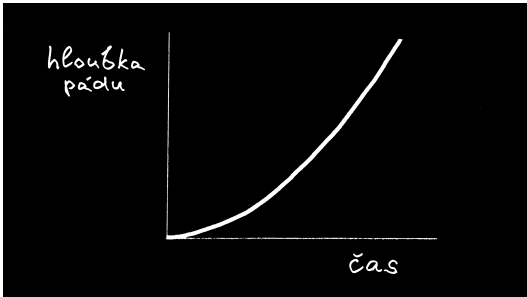
totiž platí pouze v případě, kdy je rychlost pohybu konstantní, tedy kdy je vzdálenost přímo úměrná času. Jinak řečeno, vzoreček funguje jedině za předpokladu, že graf závislosti ураžené vzdálenosti na uběhlém čase má tvar rovné čáry. Rychlost je pak reprezentována sklonem, nebo řekněme strmostí této čáry, jak vidíme na obrázku 2.



Obr. 2: Pohyb konstantní rychlostí.

Jenomže padající jablko přímou úměrou mezi vzdáleností a časem nedodrží. Jak odhalil Galileo, vzdálenost je v tomto případě přímo úměrná druhé mocnině času, tedy t^2 .

Padající plod se za nějaký čas propadne o určitý úsek. Avšak necháme-li uběhnout dvojnásobek tohoto času, nalezneme jablko dokonce o čtyřnásobek zmíněného úseku níže, protože $2^2 = 4$. Znázorníme-li si závislost vzdálenosti na čase, dostaneme křivku na obrázku 3, která se ohýbá směrem nahoru.

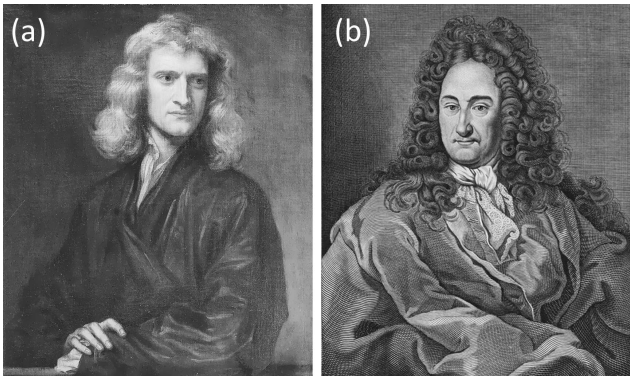


Obr. 3: Jak padá jablko.

Je zřejmé, že měnící se strmost křivky v jistém smyslu ilustruje rostoucí poměr vzdálenosti, o kterou se jablko propadne, k uběhlému času.

Studium vývoje poměru mezi čímsi, co zrovna prochází jakousi změnou v čase, je jednou z ústředních myšlenek kalkulu vůbec.

O kalkulu se někdy říká, že popisuje změnu, ale možná o něco lepší by bylo říct, že jde o *rychlost* této změny.



Obr. 4: (a) Isaac Newton (1642–1727),
(b) Gottfried Leibniz (1646–1716).

Věc dostala opravdový spád ve druhé půli sedmnáctého století, a to zejména díky práci Isaaca Newtona v Anglii a Gottfrieda Leibnize v Německu.

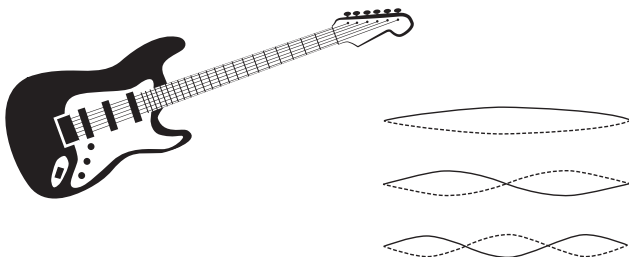
Ti dva se nikdy nepotkali. Probíhala ale mezi nimi jakási mírně ostražitá (a nepřímá) korespondence, která se zpočátku nesla v přátelském a zdvořilém duchu. Jak šel čas, přátelský duch se vytratil a vztah se vyvinul v ostrou hádku o to, kdo skutečně „vynalezl“ kalkulus.

K historii si řekneme více později, naším hlavním cílem v této knize však bude kalkulus sám.

Ze všeho nejvíce se budeme snažit o vykreslení tohoto tématu v celé jeho šíři a rozmanitosti. Soustředíme se na nejdůležitější myšlenky objevující se ve vývoji kalkulu a na některé jejich historické aspekty.

Uvidíme také, proč kalkulus zaujímá tak zásadní postavení v rozvoji fyziky a dalších věd.

Jedním z našich konkrétních cílů bude například rozvoj teorie do takové hloubky, abychom byli schopni pochopit, jak fungují vibrace kytarové struny (obrázek 5).

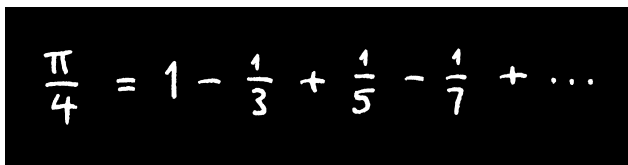


Obr. 5: Vibrace kytarové struny.

Budeme ale také klást důraz na ty případy, ve kterých máme z výsledků kalkulu potěšení jen pro ně

samotné, bez ohledu na nějaké případné praktické aplikace.

Kupříkladu na obrázku 6 vidíme překvapující souvislost mezi číslem π (o němž máme za to, že by se mělo týkat kružnic) a lichými čísly.


$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Obr. 6: Podivuhodná souvislost.

Mimo jiné se v pravou chvíli pokusíme dokázat, proč by vůbec něco takového mělo platit.

Krátce tedy lze říct, že tato knížečka je o něco ambicióznější, než vypadá. Pokud vše půjde dobře, dozvíme se nejen, co je to kalkulus, ale také *jak se do něj pustit*. Nejprve si však bude nutné trochu promyslet, jaká je vlastně podstata a duch matematiky samotné.